数学Ⅱ・数学B

<table>
<tr><th rowspan="2">問　題</th><th colspan="2">選　択　方　法</th></tr>
<tr><th>新教育課程履修者</th><th>旧教育課程履修者</th></tr>
<tr><td>第１問</td><td>必　答</td><td>必　答</td></tr>
<tr><td>第２問</td><td>必　答</td><td>必　答</td></tr>
<tr><td>第３問</td><td rowspan="4">いずれか２問を選択し，解答しなさい。</td><td rowspan="6">いずれか２問を選択し，解答しなさい。</td></tr>
<tr><td>第４問</td></tr>
<tr><td>第５問</td></tr>
<tr><td>第６問</td></tr>
<tr><td>第７問</td><td rowspan="2">解答してはいけません。</td></tr>
<tr><td>第８問</td></tr>
</table>

（注）１　「新教育課程履修者」は，必答問題の第１問・第２問と，選択問題の第３問～第６問のいずれか２問を選択し，計４問を解答しなさい。第７問と第８問は解答してはいけません。また，指定された問題数をこえて解答してはいけません。

２　「旧教育課程履修者」は，必答問題の第１問・第２問と，選択問題の第３問～第８問のいずれか２問を選択し，計４問を解答しなさい。指定された問題数をこえて解答してはいけません。

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕　$0° \leqq \theta < 180°$ の範囲で関数 $f(\theta) = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であるから，$y = f(\theta)$ とおくと

$$y = -\boxed{\text{エ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{オ}}\, t + \boxed{\text{カ}}$$

である。したがって，y の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{3}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，α が $0° < \alpha < 90°$ を満たす角度で $f(\alpha) = 3$ のとき

$$\sin(\alpha + 30°) = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は20ページに続く。）

〔2〕 不等式

$$2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

(1) 不等式(＊)において，x は対数の底であるから

$$x > \boxed{\text{セ}} \quad \text{かつ} \quad x \neq \boxed{\text{ソ}}$$

を満たさなければならない。また

$$\log_x 27 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 x}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) 不等式(＊)は

$\boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}\,(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\,\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \geqq 0$$

$x > \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}\,(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\,\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad \boxed{\text{ソ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌネ}}$$

である。

第2問 （必答問題）（配点　30）

a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の2次関数のグラフとする。

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を ℓ とする。

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，この直線が C_2 に接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

したがって，直線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$$

であり，ℓ と C_2 の接点の座標は

$$\left(\boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコ}} + \boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

(2) C_1 と C_2 の交点をPとすると，Pの座標は

$$\left(a+\boxed{\text{シ}},\ \left(a+\boxed{\text{シ}}\right)^2\right)$$

である。点Pを通って直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$$y=\boxed{\text{ス}}x+a^{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は $a>\boxed{\text{タ}}$ である。

$a>\boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x\geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}}+1\right)^{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナニ}}-1\right)$$

と表される。

「新教育課程履修者」は，第３問～第６問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

「旧教育課程履修者」は，第３問～第８問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問 （選択問題）（配点　20）

a，b，c を相異なる実数とする。数列 $\{x_n\}$ は等差数列で，最初の３項が順に a，b，c であるとし，数列 $\{y_n\}$ は等比数列で，最初の３項が順に c，a，b であるとする。

(1)　b と c は a を用いて

$$b = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a,\quad c = \boxed{\text{エオ}}\,a$$

と表され，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である。

（数学Ⅱ・数学B第３問は次ページに続く。）

(2) 等比数列$\{y_n\}$の公比は$\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$であるから，$\{y_n\}$の初項から第8項までの和は，$a$を用いて

$$\frac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シス}}a$$

と表される。

(3) 数列$\{z_n\}$は最初の3項が順にb，c，aであり，その階差数列$\{w_n\}$が等差数列であるとする。このとき，$\{w_n\}$の公差は$\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}a$であり，$\{w_n\}$の一般項は

$$w_n = \frac{\boxed{タ}\,n - \boxed{チツ}}{\boxed{テ}}a$$

である。したがって，数列$\{z_n\}$の一般項は，aを用いて

$$z_n = \frac{a}{\boxed{ト}}\left(\boxed{ナ}\,n^2 - \boxed{ニヌ}\,n + \boxed{ネノ}\right)$$

と表される。

「新教育課程履修者」は，第３問～第６問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

「旧教育課程履修者」は，第３問～第８問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問 （選択問題）（配点　20）

平面上の三つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}+\vec{b}| = 1$$

を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$ であるとする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。また

$$|2\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

（数学Ⅱ・数学B第４問は次ページに続く。）

(2) ベクトル$\vec{c}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表すと

$$\vec{c}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\vec{a}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{b}\right)$$

である。

(3) x, yを実数とする。ベクトル$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{c}$が

$$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{a}\leqq 1,\quad 0\leqq\vec{p}\cdot\vec{b}\leqq 1$$

を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{\text{コ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{サ}},\quad x\leqq\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,y\leqq x+\boxed{\text{ス}}$$

である。xとyが上の範囲を動くとき，$\vec{p}\cdot\vec{c}$は最大値$\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$をとり，この最大値をとるときの$\vec{p}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表すと

$$\vec{p}=\boxed{\text{ソ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{タ}}\,\vec{b}$$

である。

「新教育課程履修者」は，第３問～第６問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

「旧教育課程履修者」は，第３問～第８問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

第５問 （選択問題）（配点　20）

〔1〕 次の資料は２科目の小テストに関する５人の生徒の得点を記録したものである。２科目の小テストの得点をそれぞれ変量x，yとする。

生徒番号	1	2	3	4	5
x	3	4	5	4	4
y	7	9	10	8	6

以下，計算結果の小数表示では，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合は，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1) 変量xの分散を小数で求めると，$\boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イ}}$となる。

(2) 変量yを使って新しい変量tを

$$t = y - \boxed{\text{ウ}}$$

で定めると，変量tの平均は０になる。

（数学Ⅱ・数学B第５問は次ページに続く。）

(3) 変量 y を使って新しい変量 u を

$$u = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}y$$

で定めると，変量 u の分散は x の分散と同じになる。

(4) 変量 x と変量 y の相関係数を r，変量 x と変量 u の相関係数を r' とし，それぞれの2乗を r^2 と $(r')^2$ で表すと

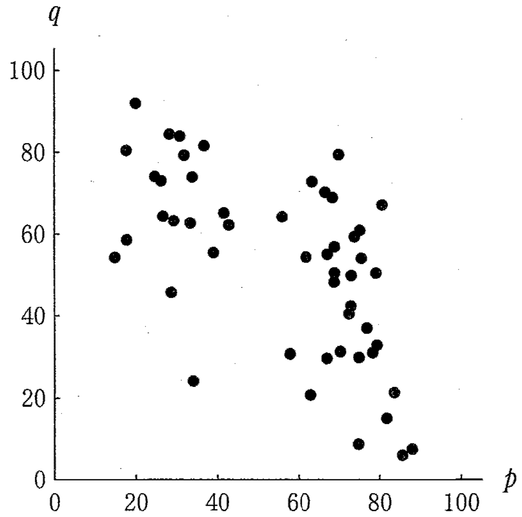
$$r^2 = \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}}$$

$$(r')^2 = \boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コサ}}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

〔2〕 変量 p と変量 q を観測した資料に対して，相関図(散布図)を作ったところ，次のようになった。ただし，相関図(散布図)中の点は，度数 1 を表す。



(1) 二つの変量 p と q の相関係数に最も近い値は $\boxed{\text{シ}}$ である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

⓪ -1.5　① -0.9　② -0.6　③ 0.0
④ 0.6　⑤ 0.9　⑥ 1.5

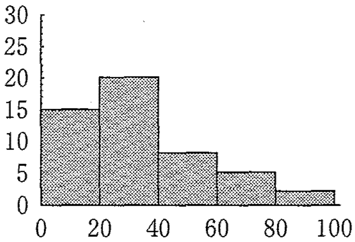
(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(2) 同じ資料に対して度数をまとめた相関表を作ったところ，次のようになった。例えば，相関表中の 7 の 7 という数字は，変量 p の値が 60 以上 80 未満で変量 q の値が 20 以上 40 未満の度数が 7 であることを表している。

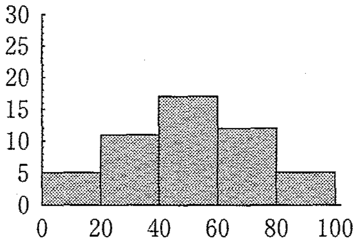
q \ p	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
80–100	2	3	0	0	0
60–80	0	7	3	5	1
40–60	2	2	0	11	0
20–40	0	1	1	7	1
0–20	0	0	0	1	3

このとき，変量 p のヒストグラムは $\boxed{\text{ス}}$ であり，変量 q のヒストグラムは $\boxed{\text{セ}}$ である。$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

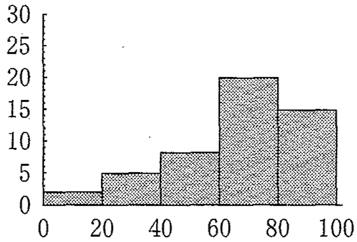
⓪



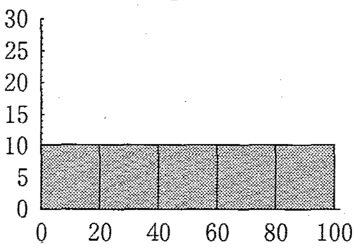
①



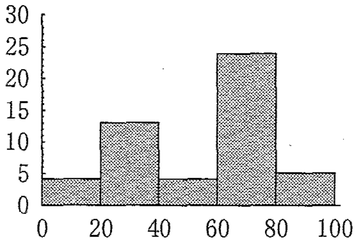
②



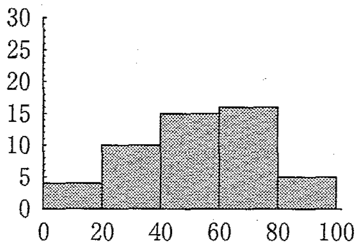
③



④



⑤



「新教育課程履修者」は，第３問〜第６問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

「旧教育課程履修者」は，第３問〜第８問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

第６問　（選択問題）（配点　20）

２以上の自然数 n を素因数分解し，その結果を出力するプログラムを作成した。

〔プログラム〕

```
100 INPUT PROMPT "n=":N
110 LET I=2
120 IF [ ア ] THEN
130     LET I=I+1
140     GOTO [ イウエ ]
150 END IF
160 LET N=N/I
170 IF N=1 THEN
180     PRINT I
190     GOTO [ オカキ ]
200 END IF
210 PRINT I;"*";
220 GOTO [ イウエ ]
230 END
```

（数学Ⅱ・数学B第６問は次ページに続く。）

ただし，100 行，110 行，160 行は，それぞれ次の各行と同じ意味である。

```
100 INPUT "n=";N
110 I=2
160 N=N/I
```

また，120 行～150 行は

120 IF $\boxed{\text{ア}}$ THEN I=I+1:GOTO $\boxed{\text{イウエ}}$

と同じ意味であり，170 行～200 行は

170 IF N=1 THEN PRINT I:GOTO $\boxed{\text{オカキ}}$

と同じ意味である。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ は「N は I で割り切れない」ということを意味する条件である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。ただし，INT(X)は X を超えない最大の整数を表す。

⓪ N-INT(I/N)*N<0　　① N-INT(N/I)*I<0　　② N-INT(I/N)*I<0

③ N-INT(I/N)*N<>0　　④ N-INT(N/I)*I<>0　　⑤ N-INT(I/N)*I>0

(2) プログラム中の $\boxed{\text{イウエ}}$ ， $\boxed{\text{オカキ}}$ に当てはまる行番号を入れよ。

（数学Ⅱ・数学B第 6 問は次ページに続く。）

(3) プログラムを実行し，変数Nに60を入力したとき，160行は $\boxed{\text{ク}}$ 回実行され，180行は $\boxed{\text{ケ}}$ 回実行される。また，変数Nに61を入力したとき，160行は $\boxed{\text{コ}}$ 回実行され，180行は $\boxed{\text{サ}}$ 回実行される。

$\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3
④ 4	⑤ 59	⑥ 60	⑦ 61

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(4) n を素数でない自然数とする。このプログラムを変更し，n の約数のうち素数であるものを，重複なく順に出力するようにするには，160 行を削除して次の161 行～164 行を追加し，さらに 210 行の "*" を "," と変更すればよい。

```
161 IF N-INT(N/I)*I=0 THEN
162     LET [ シ ]
163     GOTO [ スセソ ]
164 END IF
```

このとき，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ N=N/I	① N=N*I	② N=I/N	③ N=N+I
④ I=I+N	⑤ I=I/N	⑥ I=N/I	⑦ I=I*N

また，$\boxed{\text{スセソ}}$ に当てはまる行番号を入れよ。

「新教育課程履修者」は，第７問を解答してはいけません。

「旧教育課程履修者」は，第３問～第８問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

第７問 （配点 20）

複素数 $z = x + yi$ は $y > 0$ を満たすとする。複素数平面上で z を表す点を P，0 を表す点を O，1 を表す点を A とする。点 B は直線 OA に関して P と同じ側にあり，△OAB は正三角形であるとする。点 Q は直線 OP に関して A と反対側にあり，△OPQ は正三角形であるとする。また，点 R は直線 AP に関して O と反対側にあり，△PAR は正三角形であるとする。点 Q，R が表す複素数をそれぞれ z_1，z_2 とする。

(1) 点 B が表す複素数 β は

$$\beta = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,i}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。点 Q は，P を O のまわりに $\boxed{\text{エオ}}$°だけ回転した点であるから $z_1 = \boxed{\text{カ}}$ である。$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ βz　　① $\dfrac{z}{\beta}$　　② $-\beta z$

③ $-\dfrac{z}{\beta}$　　④ $z + \beta$　　⑤ $z + \dfrac{1}{\beta}$

（数学Ⅱ・数学B第７問は次ページに続く。）

点Rは，AをPのまわりに $\boxed{\text{エオ}}$ °だけ回転した点であるから，$z_2 = \boxed{\text{キ}}$ である。$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $z + \beta(1 - z)$　① $\beta(1 - z)$　② $1 + \beta(1 - z)$

③ $z + \dfrac{1 - z}{\beta}$　④ $\dfrac{1 - z}{\beta}$　⑤ $1 + \dfrac{1 - z}{\beta}$

したがって，$w = \dfrac{z_1 - \beta}{z_2 - \beta}$ とおくと

$$w = \frac{\boxed{\text{クケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,i}{\boxed{\text{サ}}} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

である。

(2) BQとBRが垂直に交わるのは w が純虚数のときであり，このとき，点Pはつねに $\dfrac{\boxed{\text{シ}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,i}{\boxed{\text{セ}}}$ を表す点を中心とする半径 $\boxed{\text{ソ}}$ の円周上にある。

「新教育課程履修者」は，第８問を解答してはいけません。

「旧教育課程履修者」は，第３問〜第８問のいずれか２問を選択し，解答しなさい。

第８問 （配点 20）

1個のさいころを4回続けて投げる反復試行を行う。$i=1,2,\cdots,6$ それぞれについて，i の目の出た回数を Z_i とする。ただし，4回投げて i の目が一度も出ない場合には，$Z_i=0$ とする。$Z_1, Z_2, \cdots, Z_6$ の値の最大値を X とし，$Z_1, Z_2, \cdots, Z_6$ の値のうち1以上のものの最小値を Y とする。例えば，出た目が 4，4，2，6 のときは，$Z_1=0$，$Z_2=1$，$Z_3=0$，$Z_4=2$，$Z_5=0$，$Z_6=1$ であり，$X=2$，$Y=1$ である。

以下では，$Y=k$ となる確率を $P(Y=k)$ で表す。

(1) $P(Y=4)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウエ}}$ である。

(2) $P(Y=2)=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第８問は次ページに続く。）

(3) $P(Y=k)>0$ となる k は $\boxed{\text{ク}}$ 個あり，$P(Y=1)=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

また，Y の平均は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ で，分散は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(4) $X \geqq 2$ となる条件のもとで，$Y=1$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。