

補足説明

数学②「数学II・数学B」

22ページ 第3問

「点Pから m に下ろした垂線の足」とは、
点Pからひいた m の垂線と m との交点の
ことである。

第1問 (必答問題) (配点 30)

(1) 不等式

$$\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leq 0$$

を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < x \leq \boxed{\text{イ}}$ である。 x がこの範囲にあるとき

$$y = 4^x - 6 \cdot 2^x + 10$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X = 2^x$ とおくと、 X のとる値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < X \leq \boxed{\text{エ}}$ であり

$$y = (X - \boxed{\text{オ}})^{\boxed{\text{カ}}} + \boxed{\text{キ}}$$

である。したがって、 y は $x = \boxed{\text{ク}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとり、
 $x = \log_2 \boxed{\text{コ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は18ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

[2] a を $0^\circ < a < 180^\circ$ を満たす角度とする。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で関数

$$f(\theta) = \sin(\theta - a) - \sin \theta$$

を考える。

(1) 方程式

$$f(\theta) = 0$$

の解 θ は a を用いて

$$\theta = \boxed{\text{シス}}^\circ + \frac{a}{2}$$

と表される。さらに、この解 θ が $\sin(\theta - a) = \frac{1}{2}$ を満たすならば

$$a = \boxed{\text{センタ}}^\circ$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) a を(1)で求めた角度とするとき, 関数 $f(\theta)$ は

$$\theta = \boxed{\text{チツテ}}^\circ \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

$$\theta = \boxed{\text{ニヌ}}^\circ \text{ のとき最小値 } -\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

をとる。

第2問 (必答問題) (配点 30)

- (1) 座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。 a は $a \neq 1$ を満たす実数とし、 C 上に点 $P(a+1, (a+1)^2)$ と点 $Q(2a, 4a^2)$ をとる。 2点 P, Q を通る直線を l とすると、 l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イ}} \right) x - \boxed{\text{ウ}} a^2 - \boxed{\text{エ}} a$$

である。次に、 b は $b \neq 1, b \neq a$ を満たす実数として、 2点

$$R(b+1, (b+1)^2), S(2b, 4b^2)$$

を通る直線を m とする。直線 l, m の交点 T は

$$T \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} (a+b+1), \boxed{\text{キ}} ab + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} (a+b+1) \right)$$

である。よって、 b を限りなく a に近づけると、 点 T は限りなく点

$$U \left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \boxed{\text{サ}} a^2 + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}} \right)$$

に近づく。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

(2) (1)で求めた点Uは、 a の値によらない放物線

$$D: y = \frac{\boxed{\text{シ}}x^2 - \boxed{\text{ス}}x + \boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上にある。さらに、点Uにおける放物線Dの接線の傾きは

$\boxed{\text{タ}}a + \boxed{\text{チ}}$ である。放物線Dの接線で原点Oを通るものは

$$y = x \text{ と } y = \boxed{\text{ツテ}}x$$

の二つである。

(3) 二つの放物線C, Dの共有点の座標は $(\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}})$ である。放物線

C, Dおよびy軸で囲まれた部分の面積は $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第3問 (選択問題) (配点 20)

点A(0, 0, 0)を通り、ベクトル $\vec{u}=(1, 1, 0)$ に平行な直線を l とする。
 また、点B(0, 5, -2)を通り、ベクトル $\vec{v}=(1, 0, 1)$ に平行な直線を m とする。
 l 上の点Pから m に下ろした垂線の足をP'とする。また、 m 上の点Qから l に下ろした垂線の足をQ'とする。 $PP'=QQ'$ かつ $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{QQ'}$ となるPとQを求めよう。

(1) 実数 t, t', s, s' により

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u}, \overrightarrow{BP'} = t'\vec{v}, \overrightarrow{BQ} = s\vec{v}, \overrightarrow{AQ'} = s'\vec{u}$$

と表される。直線PP'と直線 m が直交するから

$$t' = \boxed{\text{ア}} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} t$$

である。ベクトル $\overrightarrow{PP'}$ の成分を t を用いて表すと

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\boxed{\text{エ}} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} t, \boxed{\text{キ}} - t, \boxed{\text{クケ}} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} t \right)$$

である。同様に直線QQ'と直線 l が直交するから

$$s' = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} s$$

である。ベクトル $\overrightarrow{QQ'}$ の成分を s を用いて表すと

$$\overrightarrow{QQ'} = \left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} s, \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} s, \boxed{\text{ナ}} - s \right)$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

(2) さて、 $PP'^2 + QP'^2 = PQ^2 = QQ'^2 + PQ'^2$ であるから、 $PP' = QQ'$ であるための条件は $QP' = PQ'$ である。 $\overrightarrow{PQ'} = (s' - t)\vec{u}$ 、 $\overrightarrow{QP'} = (t' - s)\vec{v}$ であるから、 $PQ' = QP'$ となるのは

$$s = \boxed{二} - t \quad \dots\dots\dots ①$$

または

$$s = \boxed{又ネ} + t \quad \dots\dots\dots ②$$

のときである。

(3) ①が成り立つとき、 $\overrightarrow{PP'}$ と $\overrightarrow{QQ'}$ が垂直になるのは $t = \boxed{ノ}$ または $t = \boxed{ハ}$ のときである。($\boxed{ノ}$ と $\boxed{ハ}$ は解答の順序は問わない。)

②が成り立つときは、 $\overrightarrow{PP'}$ と $\overrightarrow{QQ'}$ が垂直になるような実数 t の値はない。

第4問 (選択問題) (配点 20)

複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) は $y \neq 0$ を満たし、かつ $1, z, z^2, z^3$ は相異なるとする。また z に共役な複素数を $\bar{z} = x - yi$ とする。

- (1) 複素数平面において $1, z, z^2, z^3$ の表す点をそれぞれ A_0, A_1, A_2, A_3 とする。線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わる条件を求めよう。線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外の点 B で交わるとする。点 B を表す複素数を w とする。点 B が線分 A_0A_1 を $a : (1 - a)$ に内分していれば

$$w = az + 1 - a$$

と表される。ここで $0 < a < 1$ である。点 B が線分 A_2A_3 を $b : (1 - b)$ に内分していれば

$$w = bz^3 + (1 - b)z^2$$

と表される。ここで $0 < b < 1$ である。ゆえに

$$bz^3 + (1 - b)z^2 = az + 1 - a$$

すなわち

$$\left(z - \boxed{\text{ア}} \right) \left(\boxed{\text{イ}} z^2 + z + 1 - \boxed{\text{ウ}} \right) = 0$$

である。 z は実数ではないから

$$z + \bar{z} = -\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}, \quad \bar{z}z = \frac{1 - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。これから a と b を、 x と y を用いて表すと

$$a = \boxed{\text{キ}} + \frac{x \boxed{\text{ク}} + y \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}} x}, \quad b = -\frac{1}{\boxed{\text{サ}} x}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

したがって、 $0 < a < 1$ 、 $0 < b < 1$ より、線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わる条件は

$$x < \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \quad \text{かつ} \quad (x + \boxed{\text{ソ}})^2 + y^2 < \boxed{\text{タ}}$$

である。

(2) z^4 の表す点を A_4 とする。 z が(1)の条件を満たすとき、すなわち、線分 A_0A_1 と線分 A_2A_3 が両端以外で交わるとき、線分 A_3A_4 と線分 A_1A_2 は両端以外で 。

に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 必ず交わる
- ② 交わることはない
- ③ 交わることも、交わらないこともある

第5問 (選択問題) (配点 20)

二つのさいころAとBがあり、各面に1, 2, 3, 4, 5, 6という目がか
 れている。これらのさいころについて、Aのさいころの各面には1, 3, 4,
 5, 6, 8の目のシールを貼^はり、Bのさいころの各面には1, 2, 2, 3, 3,
 4の目のシールを貼った。

はじめに硬貨を投げ、次にAとBのさいころを同時に投げる次の試行を行う。

- 硬貨を投げて表が出れば、両方のさいころのシールをすべてはがして二つのさいころを同時に投げる。
- 硬貨を投げて裏が出れば、両方ともシールをはがさずに二つのさいころを同時に投げる。

この試行について次の問いに答えよ。ただし、シールの有無にかかわらず、さいころの各面の出方は同様に確からしいとする。

- (1) 二つのさいころの目の和が3の倍数になる場合は、硬貨を投げて表が出たとき アイ 通りあり、裏が出たとき ウエ 通りある。したがって、この試行

において二つのさいころの目の和が3の倍数になる確率は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。

また、目の和が3の倍数であるという条件のもとで、二つのさいころの目の差

が2以下である条件つき確率は $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(2) この試行における二つのさいころの目の和を表す確率変数を X とする。

硬貨を投げて表が出たとき、同時に投げた二つのさいころの目の和の平均(期待値)は $\boxed{\text{ケ}}$ であり、その分散は $\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

硬貨を投げて裏が出たとき、二つのさいころの目の和の平均は $\boxed{\text{ス}}$ であり、その分散は $\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

したがって、この試行における X の平均 $E(X)$ は $\boxed{\text{チ}}$ 、分散 $V(X)$ は $\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

第6問 (選択問題) (配点 20)

自然数 x , p および n を入力して x^p を n で割った余りを出力するプログラムを作成する。ただし、このプログラムを実行するコンピュータは 2^{63} 以上の数値を取り扱うことができないとする。

ここで、 $\text{INT}(X)$ は X をこえない最大の整数を表す関数である。また、必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてもよい。

[プログラム1]

```

100 INPUT "X,P,N"; X,P,N
110 A=1
120 FOR K=1 TO 
130   A=A*X
140 NEXT K
150 A=
160 PRINT A
170 END
    
```

- (1) [プログラム1]の120行から140行のFOR～NEXT文で x^p を求めている。に当てはまるものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。

① P ② $2 * P$ ③ $P * P$ ④ $P * X$ ⑤ A ⑥ N

- また、150行で x^p を n で割った余りを求めている。に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

① $\text{INT}(A/N)$ ② $\text{INT}(A/N) * N$ ③ $A - \text{INT}(A/N)$
 ④ $A + \text{INT}(A/N)$ ⑤ $A - \text{INT}(A/N) * N$ ⑥ $A + \text{INT}(A/N) * N$

- (2) 2^{63} は10進法で桁の数である。 $x = 4$ ならば $p \geq$ のとき、 $x = 8$ ならば $p \geq$ のとき、おのおの $x^p \geq 2^{63}$ であるので、[プログラム1]による計算は、このコンピュータでは取り扱うことができない。ただし、, にはそれぞれ条件に適する最小の自然数を答えよ。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(3) [プログラム1]について(2)で述べた x と p の大きさに関する制限を改善するため、次の性質を利用してプログラムを変更する。

「 S, T を自然数とするとき、 S, T を n で割った余りを s, t とする。このとき、 $s < n$ かつ $t < n$ であり、積 ST を n で割った余りと積 st を n で割った余りは等しい。」

[プログラム2]

```

100 INPUT "X, P, N"; X, P, N
110 B= 
120 A=1
130 FOR K=1 TO 
140   A=A*B
150   A=
160 NEXT K
170 PRINT A
180 END
    
```

[プログラム2]の110行で x を n で割った余りを計算している。

に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|--------------|----------------|----------------|
| ① INT(X/N) | ② INT(X/N)*N | ③ X-INT(X/N) |
| ④ X+INT(X/N) | ⑤ X-INT(X/N)*N | ⑥ X+INT(X/N)*N |

[プログラム2]を実行し、変数 X, P, N にそれぞれ8, 25, 5を入力する。このとき、110行の B の値はである。さらに、130行から160行のFOR～NEXT文の各ステップにおける140行の $A*B$ の値のなかでの最大値はである。

130行から160行までのループを1回処理するのに 10^{-8} 秒必要であり、その他の行の処理時間は無視できるものとする。 $p = 2^{62}$ のとき、[プログラム2]を実行するのに必要な時間を s 秒とすると、 $10^{\text{$ } \leq s < 10^{\text{}+1である。